

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a XII-a

BAREM DE CORECTARE

PROBLEMA 12.1.	Punctaj acordat
a) Demonstrarea inegalității	3 puncte
b) Argumentarea faptului că $e^x \geq 1$, pentru $\forall x \in [0,1]$ și deci $e^x \cos x \geq \cos x$	1 punct
Aflarea primitivei funcției $\cos x e^x - 1 + \frac{x^2}{2}$	2 puncte
Calcularea ariei	1 punct
Total	7 puncte
Notă: Încercarea de a demonstra grafic inegalitatea	1 punct

PROBLEMA 12.2.	Punctaj acordat
Determinarea formulei de recurență $\Delta_n = 2n \cdot \Delta_{n-1} + 2^{n-2} \cdot (n-1)!$	3 puncte
$\frac{\Delta_n}{n!} = 2 \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{n} = 2^{n-2} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$ și $\frac{\Delta_n}{2^{n-1} \cdot n!} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$.	2 puncte
Demonstrarea $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \infty$	2 puncte

PROBLEMA 12.3.	Punctaj acordat
Argumentarea faptului că baza nu este paralelogram	1 punct
Existența a două puncte egal depărtate de dreptele suport ale laturilor	1 punct
Determinarea distanței de la piciorul înălțimii la dreptele suport ale laturilor	1 punct
Aflarea ariei bazei în cazul când piciorul înălțimii aparține interiorului patrulaterului	
Demonstrarea faptului că piciorul înălțimii nu aparține interiorului patrulaterului	2 puncte
Aflarea ariei bazei în cazul când piciorul înălțimii nu aparține interiorului patrulaterului și determinarea volumului	1 punct

PROBLEMA 12.4.		Punctaj acordat
Aducerea relației la forma $4\int_0^{\frac{3}{2}}(f(x)+x^2)dx+125\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+f(x)}}=\frac{225}{2}$ și notarea : $\sqrt{f(x)+x^2}=p(x)$.		2 puncte
Scrierea integralei sub forma $\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{4p^3+125}{p}-75\right)dx=0$		2 puncte
Scrierea integralei sub forma $\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{(p+5)(2p-5)^2}{p}dx=0$		1 punct
Argumentarea faptului că din $h(x)\geq 0$ și $\int_0^{\frac{3}{2}}h(x)dx=0$ rezultă $h(x)=0$		1 punct
Determinarea $f(x)=\frac{25}{4}-x^2$		1 punct
Notă: 1. În cazul când nu-s respectate etapele de mai sus, dar persistă ideea evidențierii expresiei $\sqrt{f(x)+x^2}$		1 punct
2. Găsirea prin metoda probelor a funcției căutate		1 punct

PROBLEMA 12.5.		Punctaj acordat
Scrierea	$a_n = \int_0^1 e^x \cdot e^{x^n} dx + \int_0^1 e^x e^{\sqrt[n]{x}} dx$	1 punct
Aflarea	$\int_0^1 e^x e^{\sqrt[n]{x}} dx = \left \begin{matrix} x = t^n \\ dx = nt^{n-1} dt \end{matrix} \right = \int_0^1 e^t e^{t^n} nt^{n-1} dt = \int_0^1 e^x e^{x^n} nx^{n-1} dx$	3 puncte
Obținerea	$a_n = \int_0^1 e^x \cdot e^{x^n} (1 + nx^{n-1}) dx = \int_0^1 e^{x+x^n} (x+x^n)' dx = e^{x+x^n} \Big _0^1 = e^2 - 1$	3 puncte
Total		7 puncte

PROBLEMA 12.6.		Punctaj acordat
Demonstrarea că	$\square H_1AL \equiv \square H_2BL$	1 punct
Demonstrarea că	$\square ALH_1 \equiv \square ANC \equiv \square BH_2L$	1 punct
Demonstrarea	$\frac{H_1Q}{QL} = \frac{LR}{RH_2}$	2 puncte
Demonstrarea	$\frac{CQ}{QH_1} = \frac{H_2R}{RC}$	1 punct
Concluzia că	$\square QH_1C \equiv \square RCH_2$	1 punct
Punctele	H_1, C, H_2 -coliniare	1 punct
Total		7 puncte

PROBLEMA 12.7.		Punctaj acordat
Aducerea la forma	$2xf^2(x) = F(x) - F(0)$	1 punct
Derivarea ambelor părți și obținerea	$2f^2(x) + 4xf(x)f'(x) = (f'(x))^2 + (4x^2 + 2)f^2(x)$	2 puncte
Obținerea	$f'(x) - 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2xf(x)$	1 punct
Deducerea că	$(\ln f(x))' = 2x$	1 punct
Obținerea	$f(x) = Ce^{x^2}$.	1 punct
Găsirea lui C și	$f(x) = 2014e^{x^2}$	1 punct
Total		7 puncte

PROBLEMA 12.8.		Punctaj acordat
Găsirea lui A^3		1 punct
Presupunerea formei generale a lui A^n		1punct
Evidențierea cazurilor și deducerea formulelor recurente pentru $n=3k$, $n=3k+1$, $n=3k+2$		3 puncte
Obținerea formulelor termenilor generali din recurențe		2puncte
Total		7 puncte