

SOLUȚII ALE PROBLEMELOR

10.1. (ro) Rezolvați în $\mathcal{R}$ ecuația $\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + x^4 - 8x^2 + 17 = 0$.

10.1. (ru) Решите на множестве $\mathcal{R}$ уравнение $\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + x^4 - 8x^2 + 17 = 0$.

Rezolvare. $\frac{2x+2}{x^2+2x+2} + x^4 - 8x^2 + 17 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 17 = -\frac{2x+2}{x^2+2x+2}. \quad (1)$

Considerăm funcția $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, f(x) = -\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$.

Vom determina $E(f)$ - mulțimea valorilor funcției f . Fie $m \in \mathcal{R}$, astfel încât $f(x) = m$.

$$f(x) = m \Leftrightarrow -\frac{2x+2}{x^2+2x+2} = m \Leftrightarrow mx^2 + 2(m+1)x + 2m+2 = 0 \quad (2)$$

Vom determina mulțimea valorilor parametrului m , astfel încât ecuația (2) să aibă cel puțin o soluție.

1) Dacă $m = 0$, ecuația are soluția -1 , deci $0 \in E(f)$.

2) Fie $m \in \mathcal{R}^*$. Calculăm $\Delta' = (m+1)^2 - 2m(m+1) = (1+m)(1-m)$.

Ecuația (2) va avea cel puțin o soluție reală dacă și numai dacă $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-1; 1] \Rightarrow E(f) = [-1; 1]$.

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow x = 0, \text{ iar } f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Observăm că $x^4 - 8x^2 + 17 = (x^2 - 4)^2 + 1 \geq 1, (\forall) x \in \mathcal{R}$, iar $x^4 - 8x^2 + 17 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Deoarece membrul stâng al ecuației (1) are valori mai mari sau egale cu 1, iar membrul drept are valori mai mici sau egale cu 1, egalitatea cu 1 avînd loc doar pentru $x = -2$, obținem că -2 este unica soluție reală a ecuației date.

Răspuns: $S = \{-2\}$

10.2. (ro) Aflați toate perechile de numere întregi (x, y) care verifică ecuația

$$3xy + (x-y)^2(x+y) = (x^2 - y^2)^2.$$

10.2. (ru) Найдите все пары целых чисел (x, y) удовлетворяющие уравнению

$$3xy + (x-y)^2(x+y) = (x^2 - y^2)^2.$$

Rezolvare: Observăm că $(0; 0)$ este soluție. Notăm $\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a+b}{2}, \\ y=\frac{a-b}{2}. \end{cases}$

Ecuația dată ia forma $3\frac{a^2-b^2}{4} + b^2a = a^2b^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 3b^2 + 4ab^2 = 4a^2b^2$.

De unde $b^2 = \frac{3a^2}{4a^2 - 4a + 3}$, atunci $3a^2 \geq 4a^2 - 4a + 3 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 \leq 0 \Rightarrow a \in \{1, 2, 3\}$.

1) Dacă $a = 1 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=1, \\ b=-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=1, \end{cases}$

2) Dacă $a = 2 \Rightarrow b^2 = \frac{12}{11} \Rightarrow b \in \emptyset$.

3) Dacă $a = 3 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a=3, \\ b=-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$

$\begin{cases} a=3, \\ b=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

Răspuns: $\{(0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 2), (2; 1)\}$

10.3. (ro) Fie O centrul cercului înscris într-un triunghi ABC . Laturile AB și BC sunt tangente la acest cerc în punctele D și E , respectiv. Fie F punctul de intersecție a dreptelor AO și DE . Demonstrați că dreptele CF și AF sunt perpendiculare.

10.3. (ru) В треугольнике ABC вписана окружность с центром O . Пусть D и E - точки касания окружности со сторонами AB и BC , соответственно. Пусть F - точка пересечения прямых AO и DE . Докажите, что прямые CF и AF - перпендикулярны.

Demonstrație:

Considerăm $\triangle AOC$ și $\triangle ADF$.

Vom demonstra că ele sunt asemenea.

$\triangle BDE$ este isoscel, deoarece BD și BE sunt tangente la cerc duse dintr-un punct exterior lui, atunci

$$m(\angle BDE) = m(\angle BED) = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\angle ABC) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle ADF) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle ABC). \quad (*)$$

$$m(\angle AOC) = 180^\circ - \frac{1}{2}m(\angle BAC) - \frac{1}{2}m(\angle BCA) = 180^\circ - \frac{1}{2}(m(\angle BAC) + m(\angle BCA)) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - m(\angle ABC)) = 90^\circ + \frac{1}{2}m(\angle ABC). \quad (**)$$

Din (*) și (**) rezultă că $\angle ADF \equiv \angle AOC$. Mai avem $\angle CAO \equiv \angle FAD$.

$\triangle AOC$ și $\triangle ADF$, având două unghiuri congruente, sunt asemenea.

$$\text{Are loc relația } \frac{AO}{AD} = \frac{AC}{AF} \Rightarrow \frac{AO}{AC} = \frac{AD}{AF} \quad (***)$$

Din relația (**) și din faptul că $\angle OAD \equiv \angle CAF$, rezultă că

$$\triangle OAD \sim \triangle CAF \Rightarrow m(\angle AFC) = m(\angle ADO) = 90^\circ.$$

10.4. (ro) Un triunghi echilateral se divide în 2014 triunghiuri echilaterale mai mici, astfel încât exact 2013 dintre ele să aibă aria egală cu 1. Să se afle toate valorile posibile ale ariei triunghiului inițial.

10.4 (ru) Равносторонний треугольник разбивается на 2014 меньших равносторонних треугольника, таким образом, чтобы точно 2013 из них имели бы площадь равной 1. Найти все возможные значения площади первоначального треугольника.

Rezolvare: Fie m raportul dintre lungimea laturii triunghiului dat și lungimea laturii triunghiului echilateral de arie 1. Fie n raportul dintre lungimea laturii triunghiului de arie diferită de 1 și lungimea laturii triunghiului echilateral de arie 1. Evident $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n > 1$ și $A_1 = m^2$, $A_2 = n^2$.

$$m^2 - n^2 = 2013 \Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 61 \cdot 11 \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+n=2013, \\ m-n=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1007, \\ n=1006, \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=671, \\ m-n=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=337, \\ n=334, \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=183, \\ m-n=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=97, \\ n=86, \end{cases} \quad \begin{cases} m+n=61, \\ m-n=33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=47, \\ n=14. \end{cases} \quad (1).$$

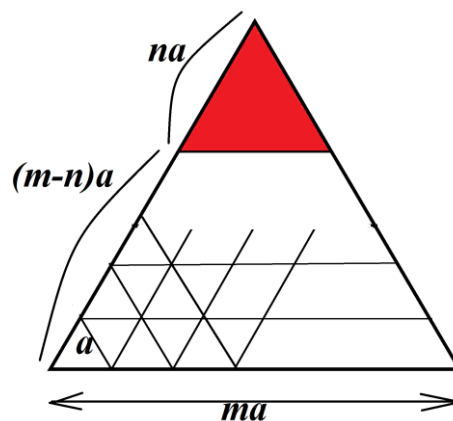
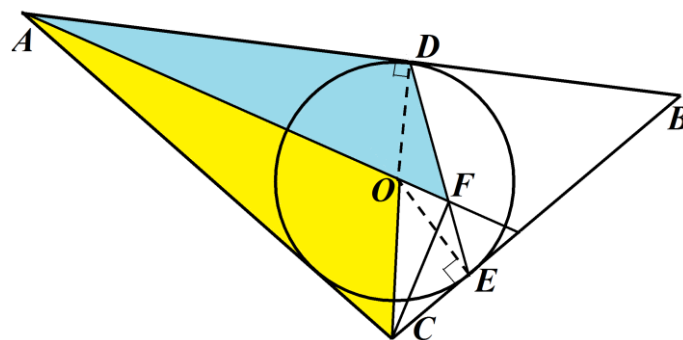
$$\text{Deci } A_1 \in \{47^2, 97^2, 337^2, 1007^2\}.$$

Fie a – lungimea laturii triunghiului echilateral de arie 1.

Vom arăta, acum, divizarea triunghiului echilateral

în corespundere cu soluțiile totalității (1).

Aceasta poate fi efectuată ca în desenul alăturat.



Răspuns: $47^2, 97^2, 337^2, 1007^2$