

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a XI-a

Soluții

11.5 Notînd $e^{-x} = t$, rezultă că $t \rightarrow 0$ cînd $x \rightarrow +\infty$. În continuare limita se scrie

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4} \ln^2(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 - t^2 + \ln^2(1+t)}{t^4}.$$

Aplicînd de trei ori regula lui L'Hospital avem succesiv:

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2 - 2t + \frac{2\ln(1+t)}{1+t}}{4t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t+1)(3t^2 - 2t) + 2\ln(1+t)}{4t^3(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^3 + t^2 - 2t + 2\ln(1+t)}{4t^3 + 4t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{9t^2 + 2t - 2 + \frac{2}{1+t}}{12t^2 + 16t^3} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{18t + 2 - \frac{2}{(1+t)^2}}{24t + 48t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{18 + \frac{4}{(1+t)^3}}{24 + 96t} = \frac{22}{24} = \frac{11}{12}.$$

Răspuns. $\frac{11}{12}$

11.6. 1) $|p + i| = |-p + i| = \sqrt{p^2 + 1} \Rightarrow |z| = 1.$

2) Presupunem că $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ astfel încît $z^n = 1 \Rightarrow (i + p)^n - (i - p)^n = 0 \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k i^{n-k} - \sum_{k=0}^n C_n^k (-p)^k i^{n-k} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^n C_n^k p^k i^{n-k} (1 - (-1)^k) = 0 \Rightarrow$$

$$2 \sum_{s=0}^n C_n^{2s+1} p^{2s+1} i^{n-2s-1} = 0 \quad \langle i^{n-2s-1} \in \{-1, 1\} \rangle \Rightarrow 2p(C_n^1 - C_n^3 p^2 + C_n^5 p^4 - \dots) = 0 \Rightarrow$$

$$n - C_n^3 p^2 + C_n^5 p^4 - \dots = 0 \quad (*)$$

2.1) Dacă n este impar, atunci $(*)$ conduce la contradicție: impar + par = 0.

2.2) Fie n - par, $n = 2^t \cdot r$, r - impar. Să arătăm că $2^t \mid C_n^{2k+1}$, pentru $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$C_n^{2k+1} = \frac{n!}{(2k+1)!(n-2k-1)!} = \frac{n}{2k+1} \cdot \frac{(n-1)!}{(2k)!(n-2k-1)!} = 2^t \cdot r \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot C_{n-1}^{2k} = 2^t \cdot \frac{r C_{n-1}^{2k}}{2k+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$q_k = \frac{r C_{n-1}^{2k}}{2k+1} - \text{întreg} \Rightarrow C_n^{2k+1} = 2^t \cdot q_k \Rightarrow \text{din } (*)$$

$$2^t \cdot r - 2^t \cdot p^2 \cdot (q_1 - p^2 q_2 + \dots) = 0 \Rightarrow r - p^2 \cdot (q_1 - p^2 q_2 + \dots) = 0, \text{ contradicție.}$$

Deci nu există $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ astfel încît $z^n = 1$.

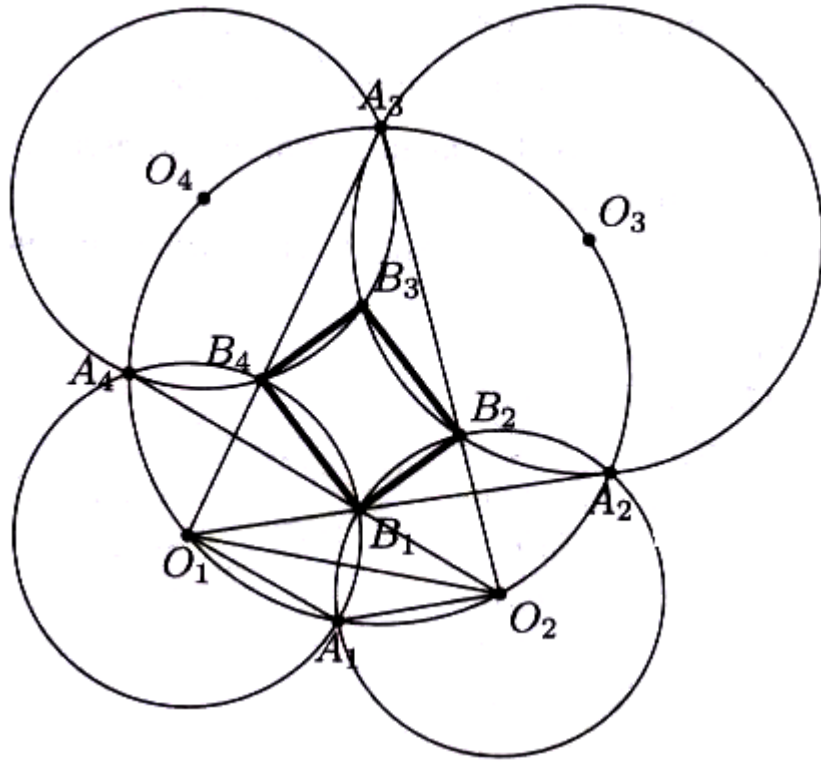
11.7. Fie punctul O_i centrul cercului S_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Vom arăta că punctul B_1 se află pe $O_1 A_2$. Din congruența tringhiurilor $B_1 O_1 O_2$ și $A_1 O_1 O_2$ ($O_1 B_1 = O_1 A_1$, $O_2 B_1 = O_2 A_1$) rezultă că $\angle B_1 O_1 O_2 \equiv \angle A_1 O_1 O_2$. Unghiurile $A_2 O_1 O_2$ și $A_1 O_1 O_2$ sunt înscrise în cercul S și se sprigină pe arcele congruente $O_2 A_1$ și $O_2 A_2$. Deci $\angle B_1 O_1 O_2 \equiv \angle A_2 O_1 O_2$ și punctul B_1 se află pe $O_1 A_2$.

Analog B_4 se află pe $O_1 A_3$, B_2 - pe $O_2 A_3$, B_1 - pe $O_2 A_4$. Vom afla măsura $\angle B_4 B_1 B_2$. Avem:

$$\begin{aligned} m(\angle B_4 B_1 B_2) &= 2\pi - m(\angle B_4 B_1 O_1) - m(\angle O_1 B_1 O_2) - m(\angle O_2 B_1 B_2) = 2\pi - \frac{1}{2}(\pi - m(\angle B_1 O_1 B_4)) - \\ &- m(\angle O_1 A_1 O_2) - \frac{1}{2}(\pi - m(\angle B_1 O_2 B_2)) = \pi + \frac{1}{2}(m(\angle B_1 O_1 B_4) + m(\angle B_1 O_2 B_2)) - m(\angle O_1 A_1 O_2). \text{ Dar} \\ m(\angle B_1 O_1 B_4) + m(\angle B_1 O_2 B_2) &= m(\angle A_3 O_1 O_2) - m(\angle B_1 O_1 O_2) + m(\angle A_3 O_2 O_1) - m(\angle B_1 O_2 O_1) = \\ &= \pi - m(\angle O_1 A_3 O_2) - (\pi - m(\angle O_1 B_1 O_2)) = m(\angle O_1 A_1 O_2) - (\pi - m(\angle O_1 A_1 O_2)) = 2 \cdot m(\angle O_1 A_1 O_2) - \pi. \end{aligned}$$

În continuare $m(\angle B_4 B_1 B_2) = \pi + \frac{1}{2}(2m(\angle O_1 A_1 O_2) - \pi) - m(\angle O_1 A_1 O_2) = \frac{\pi}{2}$.

Analog se demonstrează că celelalte unghiuri ale patrulaterului $B_1 B_2 B_3 B_4$ sunt drepte.



11.8. Dacă f satisface relația din enunț, atunci $f(1) = f(C_n^n) = C_{f(n)}^{f(n)} = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $m \neq n$ atunci $f(m) \neq f(n)$, deoarece f este injectivă. Se cunoaște că $C_n^k = C_n^p \Leftrightarrow k = p$ sau $n = k + p$. Pentru $m \neq n$, n și m din $\mathbb{N}^*$ avem $C_{f(m+n)}^{f(n)} = f(C_{m+n}^n) = f(C_{m+n}^m) = C_{f(m+n)}^{f(m)}$, de unde $f(m+n) = f(m) + f(n)$ (1).

Pentru $m = 1$ și $n > 1$ din (1) rezultă $f(n+1) = f(n) + f(1) \Leftrightarrow f(n+1) = f(n) + 1$, $(\forall)n > 1$ (2).

Avem: $f(3) = f(2) + 1$, $f(4) = f(3) + 1 = f(2) + 2$, Presupunînd că $f(k) = f(2) + k - 2$ rezultă $f(k+1) = f(k) + 1 = f(2) + k - 1$. Conform metodei inducției matematice rezultă că $f(n+1) = f(2) + n - 1$, pentru $(\forall)n > 1$ (3). Din (1) și (3) rezultă succesiv:

$f(2) + 5 = f(7) = f(4+3) = f(4) + f(3) = f(2) + 2 + f(2) + 1 = 2f(2) + 3$, de unde $f(2) = 2$ și din (3) rezultă $f(n+1) = n+1$, pentru $(\forall)n > 1$. Cum $f(1) = 1$, se obține că $f(n) = n$, pentru $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$. Funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n$ verifică relația din enunț.

Răspuns: $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = n$.