

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a XII-a, prima zi

SOLUȚII

12.1. a) Fie funcția $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$. Avem $h'(x) = -\sin x + x$, $h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Pentru $x > 0$, $h'(x) > 0$, iar pentru $x < 0$, $h'(x) > 0$, de unde rezultă că $x = 0$ este punct de minim al funcției $h(x)$. Astfel, $h(x) \geq h(0) = 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci, $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Pentru $x \in [0, 1]$ avem că $e^x \geq 1$, de unde $\cos x e^x \geq \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$. Astfel, aria figurii este:

$$A = \int_0^1 \left(\cos x e^x - 1 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) - x + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{e(\cos 1 + \sin 1)}{2} - \frac{4}{3}.$$

12.2. Fie $\det A_n = \Delta_n$, atunci

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 9 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2n+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -4 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 0 & 8 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -4 & 0 & 0 & \dots & 2n \end{vmatrix} = 2n \cdot \Delta_{n-1} + (-4) \cdot (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 8 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2n-2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2n \cdot \Delta_{n-1} + 4 \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 8 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-2 \end{vmatrix} = 2n \cdot \Delta_{n-1} + 2^{n-2} \cdot (n-1)!. \text{ Deci, } \frac{\Delta_n}{n!} = 2 \cdot \frac{\Delta_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{2^{n-2}}{n}.$$

Prin inducție se arată că $\frac{\Delta_n}{n!} = 2^{n-2} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$, de unde $\frac{\Delta_n}{2^{n-1} \cdot n!} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$.

Pe de altă parte, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \infty$.

Într-adevăr, $\ln(1+x) < x$ pentru orice $x > 0$, de unde rezultă $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$.

Având: $\ln 2 - \ln 1 < \frac{1}{2}$, $\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{3}$, ..., $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$ și adunând parte cu parte obținem:

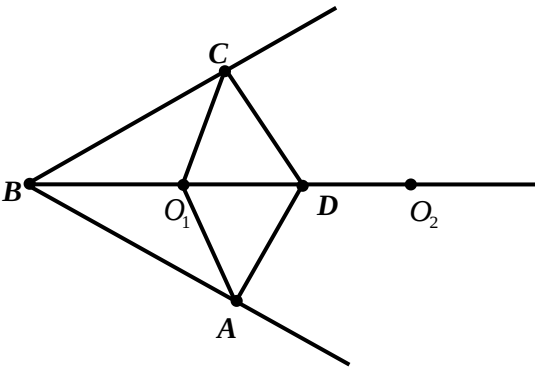
$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. Cum $\lim_n \ln(n+1) = \infty$ rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \infty$. Deci,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta_n}{2^{n-1} n!} = \infty$$

12.3. : Piciorul înălțimii este egal depărtat de la dreptele suport ale laturile bazei, la distanța $2\sqrt{3}$ de ele. Patrulaterul din bază piramidei nu poate fi paralelogram.

Fie $ABCD$ baza piramidei, în care $AB = BC = 8\text{ cm}$, $CD = DA = 6\text{ cm}$.

Există două puncte egale depărtate de dreptele AB, BC, CD, DA : punctul O_1 , situat în interiorul patrulaterului $ABCD$, și punctul O_2 , situat în exteriorul patrulaterului $ABCD$ ($O_1, O_2 \in BD$) și O_2 se află la intersecția bisectoarelor unghiurilor exterioare C și A .



Dacă O_1 este proiecția înălțimii piramidei, atunci aria bazei este $A_b = p \cdot r$, unde $r = 2\sqrt{3}$. Deci, $A_b = 28\sqrt{3}$. Pe de altă parte, aria bazei $A_b = BC \cdot CD \sin(\sphericalangle BCD) \leq BC \cdot CD = 48$ (cu egalitate în cazul când $\sphericalangle BCD$ și $\sphericalangle BAD$ sunt drepte). Dar $28\sqrt{3} > 48$.

Deci, piciorul înălțimii piramidei este O_2 . Aria bazei este

$$A_b = A_{ABO_2} + A_{BCO_2} - A_{ADO_2} - A_{CDO_2} = \frac{1}{2} 2\sqrt{3} \cdot (AB + BC - AD - CD) = \sqrt{3}(8 + 8 - 6 - 6) = 4\sqrt{3}..$$

Atunci volumul piramidei este $V = 8\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

12.4. Avem $4\int_0^{\frac{3}{2}}(f(x)+x^2)dx+125\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x^2+f(x)}}=108+\frac{9}{2}$. Notăm : $\sqrt{f(x)+x^2}=p(x)$.

Rezultă

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4p^3 + 125}{p} \right) dx - \frac{225}{2} = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{4p^3 - 75p + 125}{p} \right) dx = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{(p+5)(2p-5)^2}{p} dx = 0. \text{ Cum}$$

funcția de sub semnul integralei este nenegativă, avem că $p(x) = \frac{5}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{25}{4} - x^2$.