

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

7.1. Considerăm toate numerele naturale cu 2014 cifre. Câte dintre ele au suma cifrelor pară?

Soluție:

Considerăm următoarele 10 numere consecutive de 2014 cifre fiecare:

$a_1 a_2 a_3 \dots a_{2013} 0$

$a_1 a_2 a_3 \dots a_{2013} 1$

$a_1 a_2 a_3 \dots a_{2013} 2$

...

$a_1 a_2 a_3 \dots a_{2013} 9,$

unde $a_i, i = 2, 3, \dots, 2013$, este orice cifră, iar a_1 – orice cifră diferită de 0.

Dintre aceste numere exact 5 au suma cifrelor pară.

Dacă M_1 este mulțimea cifrelor nenule, atunci a_1 aparține acestei mulțimi și $\text{card}(M_1) = 9$.

Dacă M_2 este mulțimea tuturor cifrelor, atunci a_i , unde $i = 2, 3, \dots, 2013$, aparține acestei mulțimi și $\text{card}(M_2) = 10$.

Deci, în total condiția problemei este satisfăcută de $9 \cdot 10^{2012} \cdot 5 = 45 \cdot 10^{2012}$ numere.

Răspuns: $45 \cdot 10^{2012}$ numere.

7.2. Determinați numărul natural a , pentru care numărul $N = (a^2 + 85)^2 - (18a + 3)^2$ este prim.

Soluție:

$N = (a^2 + 85)^2 - (18a + 3)^2$ este prim dacă $(a^2 + 85 - 18a - 3)(a^2 + 85 + 18a + 3)$ este prim $\Rightarrow$
 $[(a - 9)^2 + 1] \cdot [(a + 9)^2 + 7]$ este prim dacă $(a - 9)^2 + 1 = 1 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow N = 331$ este prim.

7.3. Care poate fi numărul minimal de membri ai cercului de matematică dacă se știe că numărul fetelor reprezintă mai mult de 43,5 % și mai puțin de 43,6% din totalul membrilor acestui cerc?

Soluție:

Fie n numărul de membri, iar m numărul de fete. Atunci

$$\frac{435}{1000} = \frac{87}{200} < \frac{m}{n} < \frac{436}{1000} = \frac{109}{250}, \quad (1)$$

unde n este cel mai mic număr natural nenul care satisface relația (1).

$$\text{Relația (1) este echivalentă cu relația } 2\frac{26}{87} > \frac{n}{m} > 2\frac{32}{109} \Leftrightarrow \frac{26}{87} > \frac{n-2m}{m} > \frac{32}{109}. \quad (2)$$

Relația (2) este echivalentă cu relația

$$3\frac{9}{26} < \frac{m}{n-2m} < 3\frac{13}{32} \Leftrightarrow \frac{9}{26} < \frac{m-3(n-2m)}{n-2m} = \frac{7m-3n}{n-2m} < \frac{13}{32}. \quad (3)$$

Relația (3) este echivalentă cu relația

$$2\frac{8}{9} > \frac{n-2m}{7m-3n} > 2\frac{6}{13} \Leftrightarrow \frac{8}{9} > \frac{7n-16m}{7m-3n} > \frac{6}{13}. \quad (4)$$

Relația (4) este echivalentă cu relația

$$1\frac{1}{8} < \frac{7m-3n}{7n-16m} < 2\frac{1}{6}. \quad (5)$$

Pentru prima dată între extremitățile relației există un întreg, mai exact numărul 2.

Sistemul $\begin{cases} 7m-3n=2 \\ 7n-16m=1 \end{cases}$ are soluția $n=39$ și $m=17$.

Să demonstrăm că anume aceste numere formează soluția problemei.

Din (2) avem $n-2m > 0$. Atunci, din (3) avem $7m-3n \geq 1$. (*)

Luând în considerație (*) și (5) obținem $7n-16m \geq 1$, iar $7m-3n \geq 2$. (**)

$$\text{Obținem } n = 16 \cdot (7m-3n) + 7 \cdot (7n-16m) \geq 16 \cdot 2 + 7 \cdot 1 = 39.$$

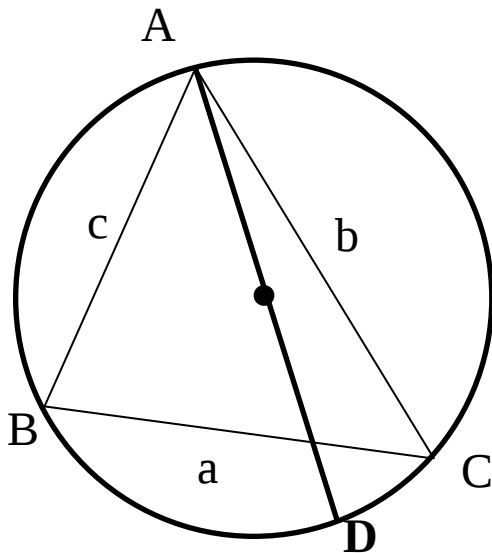
Deci, $n=39$ este minimal. În acest caz, din relația $7m-3n=2$ obținem că $m=17$.

$$\frac{435}{1000} < \frac{17}{39} < \frac{436}{1000}.$$

Răspuns: 39.

7.4. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, iar r – raza cercului circumscris acestui triunghi. Demonstrați că $a\sqrt{bc} \leq r(b+c)$.

Soluție.



Se știe că dacă $a, b \in \mathbb{R}_+$, atunci $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Fiind dat un triunghi înscris într-un cerc se știe că lungimea oricărei laturi este mai mică sau egală cu diametrul cercului respectiv.

$$a\sqrt{bc} \leq \frac{a(b+c)}{2} \leq \frac{2r(b+c)}{2} = r(b+c). \quad (\text{q.e.d.})$$