

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a VIII-a, prima zi

Soluții la problemele 8.1 – 8.4

8.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a = \left[\frac{n^2 + n - 5}{2} \right]$, unde prin $[x]$ s-a notat partea întreagă a numărului real x .

Determinați toate numerele naturale n pentru care numărul a este prim.

Soluție:

1) Dacă $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$a = \left[\frac{4k^2 + 2k - 5}{2} \right] = \left[2k^2 + k - 2,5 \right] = 2k^2 + k - 3 = (k-1) \cdot (2k+3).$$

$$\text{Cum } 2k+3 > 1 \text{ și } a \text{ - prim, rezultă că } \begin{cases} k-1=1 \\ 2k+3=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ a=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=4 \\ a=7 \end{cases}.$$

2) Dacă $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, atunci

$$a = \left[\frac{(2k+1)^2 + (2k+1) - 5}{2} \right] = \left[2k^2 + 3k - 1,5 \right] = 2k^2 + 3k - 2 = (2k-1) \cdot (k+2).$$

$$\text{Cum } k+2 > 1 \text{ și } a \text{ - prim, rezultă că } \begin{cases} 2k-1=1 \\ k+2=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ a=3 \end{cases}.$$

Astfel, numărul $a = \left[\frac{n^2 + n - 5}{2} \right]$ este prim doar pentru $n \in \{3, 4\}$.

Răspuns: $n \in \{3, 4\}$.

8.2. Determinați toate numerele de trei cifre $\overline{abc}$ care verifică relația

$$\overline{abc} = (a+b+c)^2 + 92a + 2b + c.$$

Soluție:

Din relația dată avem: $\overline{abc} = (a+b+c)^2 + 92a + 2b + c \Rightarrow 8(a+b) = (a+b+c)^2 \Rightarrow$

$$4 \cdot 2(a+b) = (a+b+c)^2 \Rightarrow 4 \cdot 2(a+b) = (a+b+c)^2 \Rightarrow 2(a+b) = m^2 \text{ și } 2 \leq a+b \leq 18 \Rightarrow a+b \in \{2; 8; 18\}$$

1) Fie $a+b=2$ și $(a+b+c)^2 = 8(a+b) \Rightarrow (2+c)^2 = 16$. În acest caz avem:

$$1.1) \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ (2+c)^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow \overline{abc}=202;$$

$$1.2) \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ (2+c)^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow \overline{abc}=112.$$

2) Fie $a+b=8$ și $(a+b+c)^2 = 8(a+b) \Rightarrow 8+c=8 \Rightarrow c=0$. În acest caz avem:

$$2.1) \begin{cases} a=8 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \overline{abc}=800; 2.2) \begin{cases} a=7 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \overline{abc}=710; 2.3) \begin{cases} a=6 \\ b=2 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \overline{abc}=620; \dots$$

Se obțin numerele: $\overline{abc} = \{800; 710; 620; 530; 440; 350; 260; 170\}$.

3) Fie $a + b = 18$ și $(a + b + c)^2 = 8(a + b) \Rightarrow (18 + c)^2 = 144$. În acest caz avem:

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 9 \\ (18 + c)^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ b = 9 \\ c = -6 \end{cases} \text{ - caz imposibil.}$$

Răspuns: $\overline{abc} = \{202; 112; 800; 710; 620; 530; 440; 350; 260; 170\}$.

8.3. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $m(\angle ABC) = 67^\circ 30'$. Punctul M , situat pe latura (BC) , este piciorul înălțimii duse din vârful A , astfel încât $BC = AM \cdot \sqrt{2}$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

Soluție:

Fie $m(\angle ABC) = 67^\circ 30' = \alpha$. Ducem $AD \parallel BC$, $AD = AM$, $AD \cap AB = \{E\}$.

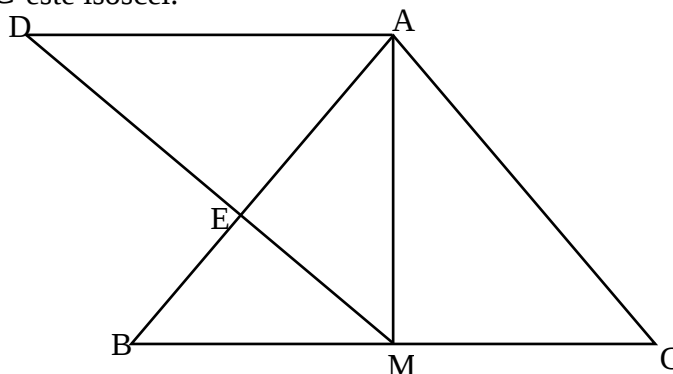
Triunghiul DAM este dreptunghic isoscel și $m(\angle ADM) = m(\angle AMD) = 45^\circ$.

Avem $\alpha = m(\angle DAB) = m(\angle DAE) = m(\angle DEA) = m(\angle BEM)$. Rezultă $AD = DE$,

$BM = EM$. Cum $DM = AM \cdot \sqrt{2} = BC = DE + EM = BM + AD = BM + CM$, rezultă că

$AD = CM$. Patrulaterul $ADMC$ este paralelogram, de unde $m(\angle ACB) = 45^\circ$, iar

$m(\angle BAC) = \alpha$. Astfel, triunghiul ABC este isoscel.



8.4. Demonstrați, că cel mai mare număr (element) al mulțimii $A = \{\overline{xyz} \mid x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz\}$ divide suma tuturor elementelor mulțimii date.

Soluție:

Se aplică formula $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ sau formula echivalentă

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] \quad x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \Leftrightarrow$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + y + z)[(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2] = 0.$$

Dar $x + y + z > 0$, de unde rezultă, că $(x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = k$, unde k este o cifră nenulă.

Deoarece x, y, z sunt cifre avem: $A = \{111; 222; 333; \dots; 999\}$.

Cel mai mare element al mulțimii A este 999.

Suma elementelor mulțimii A este:

$$S = 111 + 222 + 333 + \dots + 999 = 111 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 111 \cdot 45 = 4995 = (999 \cdot 5) : 999.$$

Deci, $S = 4995 = (999 \cdot 5) : 999$.