

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014
Clasa a VIII-a, ziua a doua

Soluții

8.5. Fie $A = 8 \cdot [a^4 + b^4 + (a-b)^4]$, unde a și b sunt numere raționale. Demonstrați, că numărul $\sqrt{A}$ este rațional.

Demonstrație:

Vom aplica formula $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$.

$$\begin{aligned} A &= 8 \cdot [a^4 + b^4 + (a-b)^4] = 8[(a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 + (a-b)^4] = 8[(a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 + (a-b)^4 - a^2b^2] = \\ &= 8[(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) + ((a-b)^2 - ab)((a-b)^2 + ab)] = \\ &= 8[(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab) + (a^2 + b^2 - 3ab)(a^2 + b^2 - ab)] = 8(a^2 + b^2 - ab)(2a^2 + 2b^2 - 2ab) = \\ &= 16(a^2 + b^2 - ab)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Avem } A = 8 \cdot [a^4 + b^4 + (a-b)^4] = 16(a^2 + b^2 - ab)^2 \Rightarrow A = [4(a^2 + b^2 - ab)]^2.$$

Arătăm, că numărul $\sqrt{A}$ este rațional:

$$\sqrt{A} = \sqrt{[4(a^2 + b^2 - ab)]^2} = |4(a^2 + b^2 - ab)| = 4(a^2 + b^2 - ab) \Rightarrow \sqrt{A} = 4(a^2 + b^2 - ab) \in Q.$$

Afirmația este demonstrată.

8.6. Să se determine toate perechile de numere întregi (x, y) care satisfac relația:

$$5 \cdot x^2 - 16 \cdot x \cdot y + 13 \cdot y^2 + 2 \cdot |x - y| = 2.$$

Rezolvare.

Scriem ecuația din enunț în forma $0 \leq (x-2y)^2 + (2x-3y)^2 = 2 \cdot (1 - |x-y|)$.

Rezultă că $1 - |x-y| \geq 0 \Leftrightarrow |x-y| \leq 1$.

Dar $x, y \in \mathbb{Z}$, de unde rezultă că $|x-y| \in \{0, 1\}$.

1) Dacă $|x-y| = 0$, atunci $x=y \Rightarrow y^2 = 1$. Obținem $x=y=1$ sau $x=y=-1$.

2) Dacă $|x-y| = 1$, atunci $(x-2y)^2 + (2x-3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x=y=0$ - contradicție cu egalitatea $|x-y| = 1$.

Astfel, mulțimea soluțiilor este $S = \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

Răspuns: $S = \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

8.7. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle BAC) = 90^\circ$ și $m(\angle BCA) = 15^\circ$. Pe cateta (AC) și pe ipotenuza (BC) sunt luate punctele D și, respectiv E astfel, încât $m(\angle BDE) = 90^\circ$ și $DE = 2 \cdot AD$. Aflați măsura unghiului ADB

Soluție:

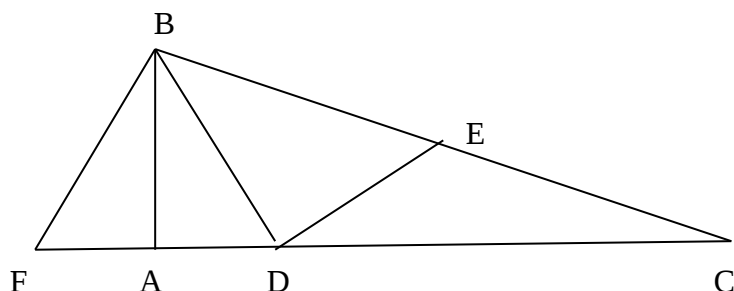
Fie $AD = x = AF$, unde $F \in AC$ este simetricul lui D în raport cu A .

Atunci $DE = DF = 2x$. Notăm $BD = BF = 2y$, $m(\angle DBE) = \alpha$, $m(\angle BED) = \beta$, $\alpha + \beta = 90^\circ$.

1) Dacă $\alpha \geq 45^\circ$, atunci $\beta \leq 45^\circ$, fapt care implică $x \geq y$. Atunci $m(\angle ADB) = m(\angle AFB) \geq 60^\circ$, de unde rezultă $m(\angle DBF) \leq 60^\circ$, și respectiv, $2x \leq 2y$ sau $x \leq y$. Astfel, $x = y$ și $m(\angle ABD) = 30^\circ \Leftrightarrow m(\angle ADB) = 60^\circ$.

2) Dacă $\alpha \leq 45^\circ$, atunci $\beta \geq 45^\circ$, fapt care implică $x \leq y$. Atunci $m(\angle ADB) = m(\angle AFB) \leq 60^\circ$, de unde rezultă $m(\angle DBF) \geq 60^\circ$, și respectiv, $2x \geq 2y$ sau $x \geq y$. Astfel, $x = y$ și $m(\angle ABD) = 30^\circ \Leftrightarrow m(\angle ADB) = 60^\circ$.

Răspuns: $m(\angle ADB) = 60^\circ$.



8.8. Rezolvați în mulțimea R ecuația: $\frac{8}{x-8} + \frac{10}{x-6} + \frac{12}{x-4} + \frac{14}{x-2} = 4$.

Soluție:

DVA: $x \in R \setminus \{2; 4; 6; 8\}$.

Se scade 1 din fiecare fracție:

$$\begin{aligned} \frac{8}{x-8} + \frac{10}{x-6} + \frac{12}{x-4} + \frac{14}{x-2} = 4 &\Leftrightarrow \frac{8}{x-8} - 1 + \frac{10}{x-6} - 1 + \frac{12}{x-4} - 1 + \frac{14}{x-2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{16-x}{x-8} + \frac{16-x}{x-6} + \frac{16-x}{x-4} + \frac{16-x}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (16-x) \left(\frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2} \right) = 0. \end{aligned}$$

1) $16-x=0$, atunci $x=16$.

$$2) \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6} + \frac{1}{x-4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-10}{(x-8)(x-2)} + \frac{2x-10}{(x-4)(x-6)} = 0 \Leftrightarrow (2x-10) \left(\frac{1}{(x-8)(x-2)} + \frac{1}{(x-4)(x-6)} \right) = 0$$

3) $2x-10=0 \Rightarrow x=5$.

$$4) \frac{1}{(x-8)(x-2)} + \frac{1}{(x-4)(x-6)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-8)(x-2)} + \frac{1}{(x-4)(x-6)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(x-5)^2-9} + \frac{1}{(x-5)^2-1} = 0$$

Notăm $(x-5)^2 - 1 = t$ și obținem ecuația $\frac{1}{t-8} + \frac{1}{t} = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow (x-5)^2 - 1 = 4 \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{5}$.

Răspuns: $S = \{5; 16; 5 \pm \sqrt{5}\}$.

