

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a XI-a, prima zi

11.1. Se dă şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n - 1}$. Aflaţi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n}$.

11.2. Prin punctul P , care se află la distanţa a de la punctul de intersecţie a diagonalelor unui paralelogram este dus un plan β , care nu intersectează paralelogramul. Demonstraţi, că suma distanţelor de la vîrfurile paralelogramului pînă la acest plan nu este mai mare decît $4a$.

11.3. Fie $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2$. Aflaţi cea mai mare valoare a funcţiei f pe segmentul $[-2; 1]$ în dependenţă de valorile parametrului real a .

11.4. Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ numere reale nenule cu proprietatea că $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătaţi că: $x_1 \arctg x_1 + x_2 \arctg x_2 + \dots + x_n \arctg x_n \geq \frac{n\pi}{4}$.

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинёу, 28 февраля – 3 марта 2014

XI класс, первый день

11.1. Пусть $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_1 > 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n - 1}$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n}$.

11.2. Через точку P , находящуюся на расстоянии a от точки пересечения диагоналей некоторого параллелограмма, проведена плоскость β , которая не пересекает параллелограмм. Докажите, что сумма расстояний от вершин параллелограмма до этой плоскости не превосходит $4a$.

11.3. Найдите наибольшее значение функции $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^4 - 2ax^2 + 3a^2$ на отрезке $[-2, 1]$ в зависимости от значений параметра a .

11.4. Для действительных ненулевых чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ выполняется равенство $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \dots + \frac{1}{x_n^2} = n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Докажите что $x_1 \arctg x_1 + x_2 \arctg x_2 + \dots + x_n \arctg x_n \geq \frac{n\pi}{4}$.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.