

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a XI-a, ziua a doua

11.5. Calculaţi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - e^{2x} + e^{4x} \cdot \ln^2(1 + e^{-x})]$.

11.6. Fie $p \in \mathbb{N}^*$ un număr par şi numărul complex $z = \frac{i-p}{i+p}$. Arătaţi că:

a) $|z| = 1$;

b) oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $z \neq \sqrt[n]{1}$.

11.7. Patru cercuri S_1, S_2, S_3 şi S_4 au centrele pe cercul S . Cercurile S_1 şi S_2 se intersectează în punctele A_1 şi B_1 , cercurile S_2 şi S_3 - în punctele A_2 şi B_2 , cercurile S_3 şi S_4 - în punctele A_3 şi B_3 , şi cercurile S_4 şi S_1 - în punctele A_4 şi B_4 . Punctele A_1, A_2, A_3 şi A_4 se află pe cercul S , iar punctele B_1, B_2, B_3 şi B_4 sunt diferite şi se află în interiorul cercului S . Demonstraţi că patrulaterul $B_1B_2B_3B_4$ este dreptunghi.

11.8. Determinaţi toate funcţiile injective $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ care verifică relaţia: $f(C_n^m) = C_{f(n)}^{f(m)}$, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}^*, n \geq m$.

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинёу, 28 февраля – 3 марта 2014

XI класс, второй день

11.5. Вычислите: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - e^{2x} + e^{4x} \cdot \ln^2(1 + e^{-x})]$.

11.6. Пусть $p \in \mathbb{N}^*$ - чётное число и $z = \frac{i-p}{i+p}$ - комплексное число. Покажите что:

a) $|z| = 1$;

b) $z \neq \sqrt[n]{1}$, для любого $n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

11.7. Центры четырех окружностей S_1, S_2, S_3 и S_4 лежат на окружности S . Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A_1 и B_1 , окружности S_2 и S_3 - в точках A_2 и B_2 , окружности S_3 и S_4 - в точках A_3 и B_3 , окружности S_4 и S_1 - в точках A_4 и B_4 . Точки A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат на окружности S , а точки B_1, B_2, B_3 и B_4 различны и лежат внутри S . Докажите что $B_1B_2B_3B_4$ - прямоугольник.

11.8. Для любых натуральных ненулевых n и $m, n \geq m$, найдите все инъективные функции $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ которые удовлетворяют равенству $f(C_n^m) = C_{f(n)}^{f(m)}$.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.