

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a XII-a, ziua a doua

12.5. Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 2}$, $a_n = \int_0^1 e^x (e^{x^n} + e^{\sqrt[n]{x}}) dx$ este constant.

12.6. Fie triunghiul dreptunghic ABC ($m(\angle ACB) = 90^\circ$). Fie M și N puncte interioare ale laturilor AC și, respectiv, BC, iar L punctul de intersecție al dreptelor AN și BM. Să se demonstreze, că punctul C și ortocentrele triunghiurilor AML și BNL sunt colineare.

12.7. Să se determine toate funcțiile derivabile $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ cu derivată continuă, astfel încât

$$2xf^2(x) = \int_0^x \left((f'(t))^2 + (4t^2 + 2)f^2(t) \right) dt \text{ și } f(0) = 2014.$$

12.8. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se găsească A^n oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 28 февраля – 3 марта 2014

XII класс, второй день

12.5. Покажите, что последовательность $(a_n)_{n \geq 2}$, $a_n = \int_0^1 e^x (e^{x^n} + e^{\sqrt[n]{x}}) dx$ является постоянной.

12.6. Дан прямоугольный треугольник ABC ($m(\angle ACB) = 90^\circ$). Пусть M и N внутренние точки сторон AC и BC соответственно, а точка является точкой прямых AN и BM. Пусть H_1 и H_2 точки пересечения высот треугольников AML и BNL соответственно. Докажите, что точки C, H_1 и H_2 лежат на одной прямой.

12.7. Найдите все дифференцируемые функции $f: [0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ с непрерывной производной

$$\text{так, что } 2xf^2(x) = \int_0^x \left((f'(t))^2 + (4t^2 + 2)f^2(t) \right) dt \text{ и } f(0) = 2014.$$

12.8. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Найдите A^n для любого $n \in \mathbb{N}^*$

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!